**К теории полета лыжника при прыжках с трамплина**

Кандидат педагогических наук, доцент Н.А. Багин, Ю.И. Волошин, доктор физико-математических наук, доцент В.П. Евтеев, Великолукский государственный институт физической культуры

После разгона и правильно выполненного отталкивания от стола отрыва результат прыжка с трамплина определится полетом лыжника в воздухе под действием тяжести и аэродинамических сил.

Рассмотрение полета в спортивной литературе [2, 4] часто носит нестрогий, качественный характер, основанный главным образом на результатах эксперимента и анализа мировых рекордов. В настоящей работе получены простые формулы, позволяющие тренеру количественно проанализировать зависимость длины прыжка от начальной скорости полета, угла вылета со стола отрыва, геометрии трамплина, аэродинамических качеств полета и скорости ветра.

Выберем начало координат на краю стола отрыва и направим горизонтальную ось Х вдоль трамплина, а ось Y вертикально вверх.

Выпишем уравнения движения центра тяжести лыжника в координатной форме:

Vx= -(KxVx/V+KyVy/V) (V+U0Vx/V)2, (1)

Vy= -g-(KxVy/V+KyVx/V) (V+U0Vx/V)2, (2)

где Vx, Vy - проекции скорости полета на координатные оси, V - абсолютная величина скорости, U0 - алгебраическая скорость горизонтального ветра, положительная при встречном ветре и отрицательная при попутном.

Kx=? rCxS/m, Ky=? rCyS/m - аэродинамические числа, имеющие размерность, обратную длине, r - плотность воздуха; Сx - коэффициент лобового сопротивления; Cy - коэффициент подъемной силы; S - фронтальная площадь лыжника с лыжами; m - масса лыжника с лыжами. Точкой обозначены производные по времени.

Уравнения (1) и (2) нелинейные. Упростить их анализ и получить приближенные решения удобно переходом к функциям комплексного переменного. Ранее этот прием успешно применялся одним из авторов к системам нелинейных уравнений небесной механики [3]. Он позволяет свести систему двух уравнений к одному. С этой целью введем в рассмотрение комплексную скорость полета (КСП): W=Vx+iVy, (3)

где i - мнимая единица и комплексное аэродинамическое число K=Kx+iKy. (4)

Умножая уравнение (2) на мнимую единицу и складывая с первым уравнением, получим с учетом (3) и (4) следующие уравнения для КСП:

W=-ig-K(V+U0(W+W)/2V)2W/V, (5)

где чертой сверху обозначены комплексно-сопряженные величины.

Полет лыжника состоит из взлета на вершину траектории и спуска с нее. Рассмотрим их поэтапно. Запишем уравнение (5) в виде:

W=-ig-K(V+U0cosj)2W/V. (6)

За время взлета, измеряемого несколькими десятыми долей секунды, скорость полета изменяется мало, а полярный угол изменяется от угла вылета j0 в несколько градусов до нуля на вершине траектории. Поэтому мы не совершим большой ошибки, если заменим в (6) скорость V начальной скоростью V0 и затем усредним полученный коэффициент перед W по интервалу изменения полярного угла. Тогда уравнение (6) превращается в дифференциальное линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

W=-ig-KC0W, (7)

где C0=V0+2U0sinj 0/j0+U02(1+sin2j0/2j0/2V0.

Решение уравнения (7) имеет вид:

W=W0exp(-KC0t)-ig(1-exp(KC0t))/KC0. (8)

На протяжении всего взлета KxC0t<<1, поэтому, разлага показательные функции в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим из (8) следующее упрощенное выражение для КСП:

W=W0(1-KC0t)-igt. (9)

Выделим в (9) действительную и мнимую части. В результате будем иметь:

Vx = V0cosj0 - axt, (10)

Vy = V0sinj0 - (g-ay)t, (11)

ax = (Kx cosj0 + Ky sinj0)C0V0, (12)

ay = (Kycosj0 - Kxsinj0)C0V0, (13)

В приближении (10), (11) движения центра тяжести лыжника вдоль координатных осей равнозамедленные. Аэродинамические ускорения даются формулами (12), (13).

Время взлета ta на вершину определится из условия Vy=0

ta = V0 sinj0 / (g-ay). (14)

Интегрируя функции (10) и (11), найдем координаты вершины траектории:

xa = V0 cosj0 ta - ?axta2, (15)

ya = V0 sinj0 ta - ?(g-ay)ta2. (16)

Рассмотрим теперь спуск лыжника с вершины траектории. Начальная скорость спуска равна:

Va = V0 cosj0 - axta. (17)

Затем скорость нарастает от скорости (17) вплоть до скорости Vg свободного планирования при полете с больших трамплинов. Определим эту скорость. При свободном полете аэродинамические силы и сила тяжести взаимно уравновешиваются и КСП перестает зависеть от времени.

Уравнение (5) принимает вид:

- ig - KP02Wg / Vg = 0, (18)

где P0 = Vg + U0(Wg +Wg) / 2Vg. (19)

Сложим равенство (18) с комплексно-сопряженным равенством

ig - KP02 Wg / Wg = 0.

В результате получим:

KWg + KWg = 0.

Умножив на KWg, находим |K|2 Wg2 + K2Vg2 = 0,

Wg = -ikVg / |K|. (20)

Подстановка (20) в (18) дает Р02 = g/ |K|.

Выбор противоположного знака в формуле (20) приведет к отрицательному значению Р02, что невозможно. Следовательно,

P0 = (g/|K|)?. (21)

Подставив (20) и (21) в (19), получим для скорости планирования следующее выражение:

Vg = (g/|K|)? - (Kg/|K|)U0. (22)

При встречном ветре скорость свободного полета (22) уменьшается, а при попутном - увеличивается. Если ветра нет, то согласно (21)

Vg = P0.

Линеаризуем уравнение (5), подставив в выражение для коэффициента перед W скорости свободного полета (23) и (22). Тогда оно примет вид:

W = -ig - KbW, (23)

где

b = P02/Vg = g/|K|Vg. (24)

Решение уравнения (23):

W = Vaexp(-KbT) - ig(1-exp(-KbT))/Kb, (25)

где

T = t - ta, (26)

обладает тем важным свойством, что при T, стримящемся к бесконечности, оно асимптотически стремится к скорости свободного полета (20). Действительно, при T, стримящемся к бесконечности, показательные функции стремятся к нулю и согласно (24):

W = -ig/Kb = -iKg|K| Vg/|K|2g = Wg.

При T = 0 из формулы (25) следует начальная скорость спуска Va. Поэтому мы полагаем, что функция (25) достаточно хорошо аппроксимирует КСП на всем протяжении полета. Интегрируя (25), получим в параметрической форме следующую аппроксимацию комплексной траектории спуска (КТС): Z = Za + Va(1 - exp(-KbT))/Kb - ig(T- (1 - exp(-KbT))/Kb)/Kb. (27)

При прыжках с больших трамплинов KxbT ~1. Поэтому разложим показательные функции в ряд и ограничимся не двумя, как выше, а четырьмя членами разложения. Тогда более простая аппроксимация КТС имеет вид

Z = Za + Va(t - ?KbT2 + 1/8(Kb)2T3) - ig(? T2 - 1/8KbT3). (28)

Выделив в (28) действительную и мнимую части, получим аппроксимацию траектории спуска в параметрической форме:

X = Xa + VaT - ЅKxbVaT2 + 1/8(Kybg + (Kx2 - Ky2)b2Va)T3, (29)

Y = Ya - 1/8(g - KybVa)T2 + 1/8(Kxbg - 2KxKyb2Va)T3. (30)

При приземлении лыжника траектория полета пересекается с плоскостью

Y + H + (X - N) tg? = 0 (31)

дорожки приземления [5], где Н - глубина опускания траектории расчетного прыжка; N - проекция траектории расчетного прыжка на продольную ось горы приземления, ? - угол наклона дорожки приземления. Подставив (29) и (30) в (31), из кубического уравнения

Tc3 - BTc2 + CTc - D = 0, (32)

где B = 3(g + (Kxtg? - Ky)bVa)/A, (33)

A = (Kx + Kytg?)bg - (2KxKy - (Kx2 - Ky2)tg?)b2Va, (34)

C = bVatg? /A, (35)

D = 6n/A, (36)

n = (N - Xa)tg? - H - Ya, (37)

оценим время спуска tc.

Подстановкой Tc = Q + B/3 (38)

уравнение (32) приводится к виду Q3+ PQ-q= 0, (39)

где P = B2/3 + C, (40)

q = 2B3/27 - BC/3 + D. (41)

Решение кубического уравнения (39) находится по формуле:

Q = ((q2/4 + P3/27)? + q/2)1/8 - ((q2/4 + P3/27)? - q/2)1/8. (42)

Подставив затем время спуска, вычисленное по формулам (33-42), в выражения (29) и (30), определим координаты места приземления лыжника XL, YL и длину прыжка

L = (XL2 + YL2)?. (43)

Например, при общепринятой позе (руки назад) в полете лыжника массой m=70 кг, когда Cx = 0,72, Cy = 0,61, r = 1,23 кг/м3, S = 0,62 м2, Kx = 3,92Ч10-3 м-1, Ky = 3,32Ч10-3 м-1,

j0 = 60, V0 = 30 м/с.

Согласно (12-17) ta = 0,441C, Va = 28,16 м/с, Xa = 12,8 м, Ya = 0,7 м.

При отсутствии ветpа b=43,7 м. Для трамплина с параметрами Н=56 м, N=102 м, H/N=0,55, L=116 м.

По формулам (29-43) получим Tc = 5,43c, XL = 137,6 м, YL = -76,1 м, L = 157 м.

Результат оказался несколько завышенным. Его можно уточнить, если исходить из более точной аппроксимации траектории спуска, которая следует из КТС (27) при выделении действительной и мнимой частей:

X = Xa + (KygT + f1Se(T) - f2Ce(T)/|K}2b, (44)

Y = Ya - (KxgT - f1Ce(T) - f2Se(T)/|K|2b, (45)

где f1= (Kx2 - Ky2)g/|K|2b + KyVa,f2 = 2KxKyg/|K|2b - KxVa, (46)

Se(T) = exp(-KxbT)sinKybT, Ce(T) = 1 - exp(-KxbT)cosKybT. (47)

После подстановки приведенных выше исходных данных в формулы (44-47) и времени спуска Tc = 5,43C, найденного из кубического уравнения (32), находим XL = 127,4 м, YL = -71,7 м, L = 146 м. Кубическая аппроксимация (29), (30) спуска, давая завышенную длину прыжка, почти не изменяет расчетного параметра прыжка H/N HL/NL=0,553. Поэтому именно ее следует положить в основу расчета времени спуска. При этом можно обойтись без решения (42) уравнения (39), поскольку |Q|3 <<1. Поэтому |Q|~ q/p. (48)

В приведенном выше примере P = 182,7 C2, q = -36,3C3,

B = 17,04C.

Согласно (42) Q = -0,23C, а по формуле (47) Q = -0,20C. Из равенства (38) Tc =5,46C. Ошибка равна 0,55%. Кубическую аппроксимацию можно значительно улучшить с помощью простейших аппроксимантов Паде [1], записать X = Xa - ?KxbVaT2/(1 + fx T) + Va T, (49)

Y = Ya - ?(g - KybVa) T2/(1 + fy T), (50)

fx = 1/3(Kyg + (Kx2 + (Kx2 - Ky2bVa)/KxVa, (51)

fy = 1/3(Kxbg - 2KxKyb2Va)/(g - KybVa). (52)

Первые два члена разложения в степенные ряды функций (49) и (50) даают кубическую аппроксимацию, остальные определенным образом учитывают неучтенные ранее члены разложения более высоких степеней t. Для нашего примера расчет по формулам (49-52), (43) дает:

XL = 122,6 м, YL = -76,7 м, L = 144,6 м.

Последний результат практически совпадает с длиной прыжка, рассчитанной по более точным формулам (44-47).

Из приведенной выше теории, справедливой при любом ветре, следует вывод, что длины прыжков с трамплинов увеличиваются с ростом начальной скорости, аэродинамического качества полета, углов вылета и наклона дорожки приземления и снижения лобового сопротивления. Легко количественно проанализировать влияние этих факторов на длину прыжка с помощью обычного микрокалькулятора.

**Список литературы**

1. Апресян Л.А. Аппроксиманты Паде. Изв. вузов. Радиофизика, 1979, т. 22, № 6, с. 653-674.

2. Грозин Е.А. Прыжки на лыжах с трамплина. - М.: ФиС, 1971.

3. Евтеев В.П. Периодические решения плоской эллиптической задачи трех тел. - Космические исследования, 1988, т. 26, вып. 5, с. 785-787.

4. Прыжки на лыжах с трамплина. Под ред. Г.Р. Ниренберга. - М.: ФиС, 1964, с. 140-152.

5. Спортивные сооружения /Под ред. Ю.А. Гагина. - М.: ФиС, 1976, с. 162-167.

Для подготовки данной работы были использованы материалы с сайта <http://lib.sportedu.ru>