**Курсовая работа**

**Понятие фракталов, законы эволюции нелинейных динамических фрактальных сред и систем биологии**

**Введение**

«Синергетика» происходит от греческого «синергетикос» - совместный, согласованно действующий. Это научное направление, изучающее связи между элементами структуры (подсистемами), которые образуются в открытых системах (биологических, физико-химических и других) благодаря интенсивному (потоковому) веществом и энергией с окружающей средой в неравновесных условиях [5].

На первом этапе развития под синергетикой понимали область научных исследований, целью которых было выявление общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения упорядоченных временных и пространственных структур в сложных неравновесных системах различной природы: физических, химических, биологических, социальных и т.д. [11].

Фрактал - множество, размерность которого отличается от обычной размерности, называемой топологической. Б. Мандельброт дает и другое определение: фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Строгого и исчерпывающего определения фракталов пока не существует [2].

**1. Фракталы**

Термин «фрактал» (от лат. fractare - ломать, дробить; fractus - расчлененный, разбитый; англ. fractal - дробный) ввел Бенуа Мандельброт, он же Б. Мандельбро (Benoit Mandelbrot), родившийся в Варшаве (в 1924 г.), работавший во Франции и США.

Согласно определению Б. Мандельброта, фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности. Проще говоря, фрактал - множество, размерность которого отличается от обычной размерности, называемой топологической. Б. Мандельброт дает и другое определение: фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Строгого и исчерпывающего определения фракталов пока не существует.

Фрактальная структура образуется путем бесконечного повторения (итерации) какой-либо исходной формы во все уменьшающемся (или увеличивающемся) масштабе по определенному алгоритму, т.е. в соответствии с определенной математической процедурой. Этот несложный процесс с обратной связью дает поразительно многообразный морфогенез, нередко подобный созданию природных форм. Таким образом, фракталы характеризуются самоподобием, или масштабной инвариантностью, т.е. единообразием в широком диапазоне масштабов [12].

Мандельброт обратил внимание на то, что довольно широко распространенное мнение о том, будто размерность является внутренней характеристикой тела, поверхности, тела или кривой неверно (в действительности, размерность объекта зависит от наблюдателя, точнее от связи объекта с внешним миром).

Суть дела нетрудно уяснить из следующего наглядного примера. Представим себе, что мы рассматриваем клубок ниток. Если расстояние, отделяющее нас от клубка, достаточно велико, то клубок мы видим как точку, лишенную какой бы то ни было внутренней структуры, т.е. геометрический объект с евклидовой (интуитивно воспринимаемой) размерностью. Приблизив клубок на некоторое расстояние, мы будем видеть его как плоский диск, т.е. как геометрический объект размерности 2. Приблизившись к клубку еще на несколько шагов, мы увидим его в виде шарика, но не сможем различить отдельные нити - клубок станет геометрическим объектом размерности 3. При дальнейшем приближении к клубку мы увидим, что он состоит из нитей, т.е. евклидова размерность клубка станет равной 1. Наконец, если бы разрешающая способность наших глаз позволяла нам различать отдельные атомы, то, проникнув внутрь нити, мы увидели бы отдельные точки - клубок рассыпался бы на атомы, стал геометрическим объектом размерности.

Но если размерность зависит от конкретных условий, то ее можно выбирать по-разному. Математики накопили довольно большой запас различных определений размерности. Наиболее рациональный выбор определения размерности зависит от того, для чего мы хотим использовать это определение. (Ситуация с выбором размерности вполне аналогична ситуации с вопросом: «Сколько пальцев у меня на руках: 3 + 7 или 2 + 8?» До тех пор, пока мы не вздумали надеть перчатки, любой ответ можно считать одинаково правильным. Но стоит лишь натянуть перчатки, как ответ на вопрос становится однозначным: «5 + 5».) [3].

Мандельброт предложил использовать в качестве меры «нерегулярности» (изрезанности, извилистости и т.п.) определение размерности, предложенное Безиковичем и Хаусдорфом. Фракталь (неологизм Мандельброта) - это геометрический объект с дробной размерностью Безиковича-Хаусдорфа. Странный аттрактор Лоренца - один из таких фракталей.

Размерность Безиковича-Хаусдорфа всегда не меньше евклидовой и совпадает с последней для регулярных геометрических объектов (для кривых, поверхностей и тел, изучаемых в современном учебнике евклидовой геометрии). Разность между размерностью Безиковича-Хаусдорфа и евклидовой - «избыток размерности» - может служить мерой отличия геометрических образов от регулярных. Например, плоская траектория броуновской частицы имеет размерность по Безиковичу-Хаусдорфу 1. больше 1, но меньше 2: эта траектория уже не обычная гладкая кривая, но еще не плоская фигура. Размерность Безиковича-Хаусдорфа странного аттрактора Лоренца больше 2, но меньше 3: аттрактор Лоренца уже не гладкая поверхность, но еще не объемное тело.

О степени упорядоченности или неупорядоченности («хаотичности») движения можно судить и по тому, насколько равномерно размазан спектр, нет ли в нем заметно выраженных максимумов и минимумов. Эта характеристика лежит в основе так называемой топологической энтропии, служащей, как и ее статистический прототип, мерой хаотичности движений.

Существуют и другие характеристики, позволяющие судить об упорядоченности хаоса.

Как ни парадоксально, новое направление, столь успешно справляющееся с задачей наведения порядка в мире хаоса, существенно меньше преуспело в наведении порядка среди структур.

В частности, при поиске и классификации структур почти не используется понятие симметрии, играющее важную роль во многих разделах точного и описательного естествознания.

Так же как и размерность, симметрия существенно зависит от того, какие операции разрешается производить над объектом. Например, строение тела человека и животных обладает билатеральной симметрией, но операция перестановки правого и левого физически не осуществима. Следовательно, если ограничиться только физически выполнимыми операциями, то билатеральной симметрии не будет. Симметрия - свойство негрубое: небольшая вариация объекта, как правило, уничтожает весь запас присущей ему симметрии.

Если определение симметрии выбрано, то оно позволяет установить между изучаемыми объектами отношение эквивалентности. Все объекты подразделяются на непересекающиеся классы. Все объекты, принадлежащие одному и тому же классу, могут быть переведены друг в друга надлежаще выбранной операцией симметрии, в то время как объекты, принадлежащие различным классам, ни одной операцией симметрии друг в друга переведены быть не могут.

Симметрию следует искать не только в физическом пространстве, где разыгрывается процесс структурообразования, но и в любых пространствах, содержащих «портрет» системы.

В работе предпринята попытка сформулировать требования симметрии, которым должна удовлетворять биологическая система. По мысли автора, «существо дела здесь состоит в эволюционном приспособлении биологических систем организмов к физическим и геометрическим характеристикам внешнего мира, в котором они себя «проявляют». Биомеханика движений скелета, «константности» психологии восприятия, биохимические универсалии жизненных процессов, движения и потоки, связанные с морфогенезом, - все это реакции отдельных видов организмов на соответствующие инвариантности, свойственные геометрико-физико-химическим характеристикам внешней среды, которые организмы «сумели» идентифицировать и включить в свою филогению в процессе эволюции. Чем больше инвариантных, регулярных свойств своего внешнего мира смог распознать и «учесть» организм, тем больше хаоса удается ему устранить из внешней среды, что в койне концов обеспечивает его преимущества с точки зрения принятия решений, уменьшения фрустрации, доминирования и, по существу, выживания» [13].

Классифицировать структуры можно и по степени их сложности. Однако и в этом направлении предприняты лишь первые шаги.

Сложность поведения даже простых моделей (термин «элементарных» применительно к этим моделям так же, как и в случае элементарных частиц, отражает скорее уровень наших знаний о них, чем их истинную сложность) навела исследователей на мысль обратиться к аксиоматическому методу с тем, чтобы, следуя Гильберту, отделить существенные особенности модели от несущественных, случайных и тем самым облегчить построение моделей, воспроизводящих нужный режим поведения.

С. Улам и другие авторы рассмотрели отображения плоскости на себя, производимые по определенным правилам (аксиомам). Наиболее эффектным оказалось отображение, предложенное Копуэем, - его знаменитая игра «Жизнь» [7].

Играют на плоскости, разбитой на квадратные клетки одного и того же размера. Каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: либо быть занятой (например, фишкой), либо пустой. Начальное состояние (начальная расстановка фишек) может быть выбрана произвольно. Последующие состояния клеток зависят от занятости соседних клеток на предыдущем ходу. Соседними считаются восемь клеток, непосредственно примыкающих к данной (имеющих с ней либо общую сторону - примыкание справа, слева, сверху и снизу, либо общую вершину - примыкание по диагонали). Игра состоит из дискретной последовательности ходов. На каждом ходу ко всем клеткам доски применяются следующие три правила (аксиомы).

. Выживание. Клетка остается занятой на следующем ходу, если на предыдущем были заняты две, или три соседние с ней клетки.

. Гибель. Клетка становится свободной на следующем ходу, если на предыдущем было занято более трех или менее двух соседних клеток (в первом случае клетка «погибает» из-за перенаселения, во втором - из - за чрезмерной изоляции).

. Рождение. Свободная клетка становится занятой на следующем ходу, если на предыдущем были заняты три и только три соседние клетки.

Кажущаяся простота правил Конуэя обманчива: как и простые динамические системы, доска с расставленными на ней фишками может перейти в весьма сложные режимы, имитирующие процессы гибели (полное уничтожение всех расставленных в начальной позиции фишек), неограниченный рост, устойчивое стационарное состояние (система с определенной периодичностью в пространстве), периодические по времени осцилляции [1].

**2. Классификация фракталов**

Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале. Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

На сегодняшний день существует много различных математических моделей фракталов (треугольник Серпинского, снежинка Коха, кривая Пеано, множество Мандельброта и лоренцевы аттракторы). Отличительная особенность каждой из них является то, что в их основе лежит какая-либо рекурсивная функция, например: xi=f (xi-1). С применением ЭВМ у исследователей появилась возможность получать графические изображения фракталов. Простейшие модели не требуют больших вычислений, тогда как иные модели настолько требовательны к мощности компьютера, что их реализация осуществляется с применением суперЭВМ.

Для того чтобы представить все многообразие фракталов удобно прибегнуть к их общепринятой классификации. Существует три класса фракталов: геометрические, алгебраические и стохастические.

. Геометрические фракталы

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

Геометрические фракталы были открыты в начале ХХ века. В этот период математики искали такие кривые, которые ни в одной точке не имеют касательной. Это означало, что кривая резко меняет свое направление, и притом с колоссально большой скоростью (производная равна бесконечности). Поиски данных кривых были вызваны не просто праздным интересом математиков. Дело в том, что в начале ХХ века очень бурно развивалась квантовая механика. Исследователь М. Броун зарисовал траекторию движения взвешенных частиц в воде и объяснил это явление так: беспорядочно движущиеся атомы жидкости ударяются о взвешенные частицы и тем самым приводят их в движение. После такого объяснения броуновского движения перед учеными встала задача найти такую кривую, которая бы наилучшим образом аппроксимировала движение броуновских частиц. Для этого кривая должна была не иметь касательной ни в одной точке. Математик Кох предложил одну такую кривую.

Триадная кривая Коха обладает рядом свойств, отличающих ее от ранее известных прямых. Во-первых, эта кривая не имеет длины, т.е. с числом поколений ее длина стремится к бесконечности. Во-вторых, к этой кривой невозможно построить касательную - каждая ее точка является точкой перегиба, в которой производная не существует, - эта кривая не гладкая.

Длина и гладкость - фундаментальные свойства кривых, которые изучаются как евклидовой геометрией, так и геометрией Лобачевского, Римана. К триадной кривой Коха традиционные методы геометрического анализа оказались неприменимы. Именно с этого времени ученые начали сомневаться в универсальности традиционной геометрии.

Еще один пример простого самоподобного фрактала - ковер Серпинского, придуманный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. В способе построения мы начинаем с некоторой области и последовательно выбрасываем внутренние подобласти.

. Алгебраические фракталы

Геометрические фракталы являются статическими фигурами. Подобный подход вполне приемлем до тех пор, пока не возникает необходимость рассмотрения таких природных явлений, как падающие потоки воды, турбулентные завихрения дыма, метеосистемы и потоки на выходе реактивных двигателей. В этих случаях один-единственный фрактал соответствует моментальному снимку данного феномена. Структуры, изменяющиеся во времени, мы определяем как динамические системы. Интуитивно понятно, что динамической противоположностью фрактала является хаос. Это означает, что хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

Многие хаотические динамические системы, описывающие феномены окружающего нас мира, устроены очень сложно и не могут быть представлены традиционными методами математического анализа. По-видимому, нет никакой возможности получить математические выражения для решений в замкнутом виде, даже если использовать бесконечные ряды или специальные функции. В таких случаях применяются модели алгебраических фракталов.

Рассмотрим знаменитый пример, весьма наглядно демонстрирующий, что стоит за термином «хаотическая динамика». Эдвард Лоренц из Массачусетского технологического института в 1961 году занимался численными исследованиями метеосистем, в частности моделированием конвекционных токов в атмосфере. Согласно описанию эксперимента, принадлежащему самому Лоренцу, он вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем остановил счет. Его заинтересовала некоторая особенность решения, которая возникала где-то в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления с этого момента. Результаты повторного счета, очевидно, совпали бы с результатами первоначального счета, если бы начальные значения для повторного счета в точности были равны полученным ранее значениям для этого момента времени. Лоренц слегка изменил эти значения, уменьшив число верных десятичных знаков. Ошибки, введенные таким образом, были крайне невелики. Вновь сосчитанное решение некоторое время хорошо согласовывалось со старым. Однако по мере счета расхождение возрастало, и постепенно стало ясно, что новое решение вовсе не напоминает старое. Лоренц вновь повторял и проверял вычисления (вероятно, не доверяя компьютеру), прежде чем осознал важность эксперимента. То, что он наблюдал, теперь называется существенной зависимостью от начальных условий - основной чертой, присущей хаотической динамике.

Существенную зависимость иногда называют эффектом бабочки. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды. Сам Лоренц разъяснил это понятие в статье «Предсказуемость: может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе?», опубликованной в 1979 году.

Алгебраические фракталы - это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах. Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций (повторения одной и той же математической процедуры), зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры. Сам Бенуа Мандельброт предложил модель алгебраического фрактала, которая уже стала классической. Математическое описание модели следующее: на комплексной плоскости в неком интервале для каждой точки с вычисляется рекурсивная функция Z=Z2+c. После N повторений данной процедуры вычисления координат точек, на комплексной плоскости появляется удивительно красивая фигура, чем-то напоминающая грушу (прил. 6, б).

Стохастические фракталы

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д.

Кривая Коха, как бы ни была похожа на границу берега, не может выступать в качестве её модели из-за того, что она всюду одинакова, самоподобна, слишком «правильна». Все природные объекты создаются по капризу природы, в этом процессе всегда есть случайность. Фракталы, при построении которых в итеративной системе случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. К этому классу фракталов относится и фрактальная монотипия, или стохатипия. Термин «стохастичность» происходит от греческого слова, обозначающего «предположение».

Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Существуют и другие классификации фракталов, например деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические) [12].

**3. Биологические фракталы. Природные фракталы**

фрактал топологический мандельброт

а) Древние фрактальные животные

Организмы в ходе эволюции усложнялись. Возможно, наиболее простые в древности состояли из одинаковых клеток с фрактальной организацией.

«В прошлом фрактальные животные располагались на глубине нескольких тысяч метров на дне океана. Они не считаются растениями, так как на такой глубине света не хватило бы на процесс фотосинтеза. Предположительно, они жили за счет растворенного в океанских водах углерода и других питательных веществ, которые они поглощали всем телом. Они не могли передвигаться, не имели рта и мышц и являются самыми древними многоклеточными организмами на Земле» [4].

Одной из наиболее специфических особенностей их строения является их способ формировании тел. Они обладали очень простой структурой ветвления, так как их создание занимало 6-8 «генетических команд», следовательно, они использовали фрактальный способ построение тел.

«Фрактофус - одна из наиболее распространенных окаменелостей в Великобритании, свидетельствующих о существовании в прошлом этих животных. Он состоял из ветвящихся элементов, по 20 с каждой стороны. Каждая ветвь в точности повторяла своего родителя, начиная с микроскопического уровня. Это был простой, но очень эффективный способ построения тела. Благодаря тонко разделенным ветвям у организма была большая по площади поверхность, что позволяло ему впитывать питательные вещества напрямую, не имея рта и пищеварительного тракта.

Используя фрактальный способ построении тела животные впервые в истории жизни на Земле стали крупными. Фрактальный способ оказался полезным для того, чтобы ранние организмы начали развиваться, потому что для создания одной особи требовался минимум генетической информации. Фрактальные организмы исчезли после нескольких миллионов лет своего существования».

Таким образом, Дэвид Аттенборо делает очень важное с нашей точки зрение предположение, заключающееся в том, что фрактальная структура у древних животных позволяла очень просто кодировать информацию об организме. Даже такое примитивное живое существо состояло из многих миллионов живых клеток. Фрактальная структура позволяла организовывать положение этих клеток в пространстве при помощи нескольких простых команд [10].

б) Современные фрактальные организмы

С течением эволюции полностью фрактальные организмы прекратили свое существование, но фрактальность отдельных структур осталась. В настоящее время фрактальность можно встретить повсеместно [8].

Растения. Жилка листа состоит из ксилемы (древесина) и флоэмы (луб). Ксилема выполняет функцию транспорта воды и минеральных веществ от корня к листьям (для фотосинтеза), а флоэма транспортирует органические вещества (полученные в результате фотосинтеза) от листьев к корню.

У двудольных и однодольных растений жилкование листа разное. У двудольных растений жилкование подразделяется на пальчатое (клен, ревень) и перистое (дуб, осина, липа) Наиболее яркие фрактальные свойства проявляются при перистом типе жилкования. Для фотосинтеза растению нужна вода, а такой тип жилкования обеспечивает каждую клетку листа достаточным количеством воды, что способствует более быстрому протеканию химических процессов, в том числе и фотосинтеза.

Фрактальность можно наблюдать и у дихотомического ветвления побегов.

«Ветвление имеет большое значение в жизни растения, увеличивая ассимилирующую поверхность (ассимиляция - совокупность процессов синтеза) и улучшая, таким образом, его питание. Вместе с этим нарастает и общее количество меристемы (образовательной ткани). Так как меристема образуется не сразу, растение всегда имеет «запас» этой ткани, используемые не только на естественное увеличение мощности побеговой системы, но и на восстановительные процессы после какого-либо повреждения» [6].

Животные. «Любой орган животного в норме также имеет квазифрактальную (почти фрактальную) структуру, даже если внешне не выглядит фрактализованным. Каждая живая клетка многоклеточного образования должна непрерывно потреблять кислород, питательные вещества, избавляться от углекислого газа и продуктов обмена. Одним словом, она должна достаточно свободно контактировать с внешней средой, чтобы обмениваться с ней веществом и энергией. Для внутренней среды организма функцию внешней среды выполняет кровеносная система, она осуществляет газообмен, обмен питательными веществами, информационными молекулами, управляющими деятельностью клеток, в кровь сбрасываются продукты обмена. Обмен между кровеносной системой и внутренней средой организма осуществляется через двумерную поверхность эндотелия капилляров, то есть через плоскость. Чем больше площадь обмена, то есть площадь эндотелия капилляров, тем обмен интенсивнее, тем большее количество продуктов обмена может быть перенесено через неё за единицу времени. Наиболее эффективно заполнить трёхмерный объём двумерной плоскостью, как упоминалось ранее, можно фрактальной укладкой этой плоскости внутри заданного объёма. Фрактальная укладка позволяет достичь изгибами или ветвлениями фрактальной самоподобной двумерной структуры, заполняющей трёхмерное пространство, каждой клетки, каждого участка внутри заполняемого ею объёма. Кровеносная система опутывает квазифрактальной капиллярной сетью внутренний объём каждого органа организма животного так, что в непосредственной близости от каждой клетки находится капилляр, через который происходит обмен клетки с окружающей средой. Кровеносная система организма и каждого отдельного органа квазифрактальна. Но, если рассматривать кровеносную систему как внешнее, относительно самого органа, пространство, например, если удалить из органа кровеносную систему, то и сам орган, разделённый на сегменты пространством, занимаемым ранее кровеносной системой, будет также представлять собой квазифрактал. Обобщая, можно сказать, что структура всякого достаточно большого многоклеточного органа всегда квазифрактальна, так как только через квазифрактальную организацию можно добиться эффективного обмена каждой клетки органа с окружающей средой» [4].

**Использованная литература**

1. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.

2. Божокин С.В. «Фракталы и мультифракталы» // С.В. Божокин, Д.В. Паршин. - М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. С. 65-119.

. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука. 1997.

. Каретин Ю.А. Синергетика: курс лекций для биологов. - ДВГУ, 2007. С. 131-132.

. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. - М. Наука. 1990.

. Лотова Л.И. Ботаника. Морфология и анатомия высших растений. М.: Эдиториал УРСС, 2001. С. 138.

. Малинецкий Г.Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1997.

. Мун Ф. Хаотические колебания. - М.: Мир. 1990.

. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука, 1996.

. Расшифровка текста научно-популярного фильма «Первая жизнь с Дэвидом Аттенборо», 2010, сделана автором реферата.

. Трубецков Д.И. «Введение в синергетику. Хаос и структуры» // Д.И. Трубецков. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - С. 189-220.

. Федер Е. Фракталы. - М., Мир, 1991.

. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980.