ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В КРОВЕНОСНЫХ СОСУДАХ

Содержание

Введение

. Краткие сведения по физиологии кровообращения человека

.1 Общее строение сердечно-сосудистой системы (ССС)

.2 Строение и функционирование сердца

.3 Сердечный цикл (полная последовательность сокращения и расслабления)

.4 Электрическая активность сердца

.5 Основы строения сосудистой сети

. Физические основы моделирования сердечно-сосудистой системы (ССС)

.1 Основы механики жидкостей

.2 Уравнение гидродинамики

.3 Закон гидравлики

.4 Механические свойства стенок кровеносных сосудов

.5 Упругие и сократительные свойства сердечной мышцы

. Математические модели процессов в системе кровообращения

.1 Упрощенная модель однокамерного сердца

.2 Упрощенная модель артериального кровотока

.3 Модель работы четырехкамерного сердца

.4 Квазиодномерная модель гемодинамики

4. Математические модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками

4.1 Материалы и методы

Заключение

Литература

Введение

В данной выпускной квалификационной работе изложены сущность движения крови по сосудам человека, основные понятия о гемодинамике и рассмотрены математические модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками.

Целью данной работы является рассмотрение физико-медицинской связи динамики движения крови в кровеносных сосудах человека с точки зрения физики с использованием математической модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками, которая позволит упростить принятие решений при точной диагностике заболеваний кровеносных сосудов.

Нередко для восстановления кровообращения в пораженных сосудах помимо медикаментозного лечения проводятся реконструктивные операции, и часто невозможно объективно оценить, какой тип оперативного вмешательства будет оптимальным для конкретного пациента, а также насколько близок будет кровоток в сосуде к нормальному после операции. Основная проблема при выполнении таких расчетов состоит в определении механических свойств стенок сосудов, параметров кровотока и других параметров с точки зрения физики.

Еще одной важной проблемой при прогнозировании результатов лечения является скорость расчетов: как правило, большинство современных математических моделей требуют численного решения, причем во многих случаях вычисления получаются затратными по времени и требуют довольно мощные компьютеры. При этом снижение времени расчетов путем упрощений может привести к неточности полученных результатов, что, безусловно, недопустимо.

Часто для численных расчетов применяют метод конечных элементов. Однако решение задач гемодинамики с помощью МКЭ требует больших затрат по времени.

Таким образом, актуальной является задача понимания с точки зрения физических представлений проблем гемодинамики, которая бы достаточно полно описывала движение крови в кровеносных сосудах, учитывая взаимодействие жидкости со стенкой, и являлась легко адаптируемой под конкретного пациента.

Применение математических методов в биологии, физиологии и медицине исторически началось несколько позднее, чем в физике, химии и других естественных науках, хотя основные закономерности теории упругости, гидравлики, гидродинамики, мышечного сокращения были установлены еще в 19-м веке (Гук, Пуазейль, Стокс, Франк и многие другие). С другой стороны, многие математические понятия и вычислительные алгоритмы возникли непосредственно под влиянием медико-биологических проблем, например, теория вероятностей и математическая статистика, уравнения Вольтерра, теория игр, теория оптимального управления, распознавание образов и др.

В 20-м веке использование математики в медицине неуклонно расширялось, особенно с момента появления компьютеров и математического (компьютерного) моделирования. Это привело к расширению взаимно полезного общения математиков и медиков. Одна из первых совместных групп появилась в Институте прикладной математики под руководством академика И.М. Гельфанда и профессора А.Л. Сыркина, опубликовавших пионерские работы в нашей стране. Большой вклад внесли группы академиков О.М. Белоцерковского и Ю.И. Журавлева, группы исследователей в Институте математического моделирования и на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Имеются многочисленные труды посвященные соединению математических подходов и практического опыта врачей.

Многие современные книги по физиологии и медицине (например, монографии Е.И. Чазова, К. Каро, Д. Мормана и Л. Хеллера включают серьезный математический аппарат.

Однако пока ощущается недостаток в литературе, излагающей биомедицинские проблемы в данной области.

В настоящей работе делается попытка исследования динамики движения крови с учетом основ функционирования сердечно-сосудистой системы и ее частей, регистрации ее параметров с точки зрения математического анализа и моделирования. При этом основной упор делается на формулировку тех медико-биологических задач, которые поддаются адекватному математическому описанию и могут быть решены точными или приближенными аналитическими методами.

Объектом исследования в данной работе является математическая модель движения крови в системе сосудов человека с упругими стенками.

Задачей настоящей работы является упрощение расчетов математической модели движения крови в системе сосудов путем применения программного пакета Mathcad, в среде которой, задачи выполнения, документирования и совместного использования расчетов интегрированы в единый процесс, что существенно повышает производительность работы и сокращает время расчетов.

Список литературы содержит 30 наименований различных авторов по направлению математических моделей биомеханики в медицине.

Основной упор делался на учебное пособие под редакцией Калябина Г.А. и автореферата диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Доль А.В.

Результаты исследования могут быть использованы для проведения дальнейших исследований в данной области.

Структура работы: выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы.

1. Краткие сведения по физиологии кровообращения человека

.1 Общее строение сердечно-сосудистой системы (ССС)

По современным представлениям, жидкости, содержащие воду, составляют около 60% массы тела. Эта вода распределяется между клеточным, межклеточным и плазменным пространствами. Из внеклеточной жидкости только небольшой плазменный объем циркулирует в сердечно-сосудистой системе (ССС). Кровь состоит из плазмы и приблизительно равного ей объема (красных клеток крови эритроцитов) форменных элементов.

Доля объема клеток крови в общем ее объеме называется гематокритом (в среднем 6 л у человека). Этот особый показатель отражает способность крови переносить кислород, который поглощается гемоглобином эритроцитов в объемах около 50 раз большем, чем в плазме крови. Плазма крови осуществляет транспортировку минеральных веществ и ионов, а также белков, большую часть из которых составляет альбумин.

Сердечно-сосудистая система рассматривается как: малый круг кровообращения (легочный), включающий правый сердечный насос и легкие и большой круг (системная циркуляция) кровообращения, состоящий из левого сердечного насоса и обширной системы периферических сосудов, распределяющих кровь (артерии и артериолы) по всем системам сосудов тела человека, доставляющих ее к самым малым отделам (капилляры) всех органов и затем возвращающих кровь (вены и венулы) назад к сердцу.

Системная и легочная циркуляция осуществляется последовательно, т.е. одна за другой, соответственно левое и правое сердце должны в норме выбрасывать идентичную долю объем крови в минуту. Величина этого минутного объема сердца в норме составляет 5 л/мин.

Все органы тела включены в систему параллельно, в силу чего почти все органы снабжаются кровью с идентичным составом таким, какой она имеет после выхода из легких по артерии. Параллельная структура органов дает возможность регулировать ток крови через любой орган независимо от других органов. На приведенной схеме функциональной организации единственное сердце изображено трижды: как левый и правый сердечный насос и как сердечная мышца миокард, требующая доставки к ней артериальной крови коронарное кровообращение.

Рисунок 1.1. Функциональная организация

.2 Строение и функционирование сердца

Сердце - орган полый мышечный, расположенный в центре грудной клетки человека. Его масса и объем у человека составляют в среднем соответственно 350 г., 650 куб. см.

Основной деятельностью сердца является прокачка крови в сосуды. За один импульс(сокращение)оно выталкивает в аорту (и далее в другие артерии системы) в среднем 75 мл крови, что при нормальном пульсе 65-75 ударов сердца в минуту равняется минутному расходу около 5 л, а за сутки сердце проталкивает около 6 куб. метров, за один год - более 2000 куб. метров, а на протяжении жизни - примерно 150 000 куб. метров крови.

Сердце человека, как и у других млекопитающих, имеет четыре камеры: два предсердия (левое и правое) и два желудочка (рис. 1.2).

Рисунок 1.2. Строение сердца и пути тока крови

Венозная - отдавшая клеткам ткани кислород и питательные вещества и впитавшая углекислоту и другие продукты обмена веществ, кровь поступает в правое предсердие из нижней и верхней полых вен. Из правого предсердия кровь поступает через клапан трехстворчатый в правый желудочек, и оттуда выталкивается через клапан легочной артерии. Пройдя легкие, там где осуществляется интенсивный газообмен (эритроциты крови оставляют углекислый газ и насыщаются кислородом), кровь снова возвращается к сердцу в левое предсердие, чем завершается так называемый малый круг тока крови. Из левого предсердия кровь протекает через митральный клапан в левый желудочек - самую мощную камеру сердца, и оттуда поступает через аортальный клапан в аорту, и далее через распределенную артериальную систему доставляется в капилляры, существующие во всех органах тела человека. После протекания через капилляры кровь собирается венозной сетью и приходит в правое предсердие, замыкая большой круг обращения крови.

Клапаны сердца трикуспидальный (трехстворчатый), аортальный, легочной артерии и митральный играют очень важную роль, препятствуя обратному возвращению крови из артерий в желудочки и из желудочков в предсердия. Нарушение работы любого из клапанов называется пороком сердца, который вызывает резкое нарушение тока крови.

.3 Сердечный цикл (полная последовательность сокращения и расслабления)

Механическая деятельность сердца может быть показана изменениями давления, объема и тока крови, происходящими в протяженности каждого сердечного цикла. На приведенной ниже диаграмме Уиггерса представлены синхронизированные записи следующих характеристик действия сердца, относящихся к его левой половине - сверху вниз:

а) II отведение кардиограммы;

б) давление левом предсердии и левом желудочке и в аорте;

в) показатели открытия и закрытия аортального и митрального клапанов;

г) фонограмма - запись звуков, озвучивающие сердцем;

д) объем левого желудочка;

е) кровоток в аорте;

ж) единица времени (длительность всего цикла в среднем составляет 0.9 секунд, что соответствует пульсу 70 уд/мин).

Рисунок 1.3. Диаграмма Уиггерса

Диастола желудочков начинается (в условный момент времени - 0.02 сек) открытием клапанов атриовентрикулярных: трехстворчатого - между правым предсердием и правым желудочком - и митрального - двухстворчатого - между левым предсердием и левым желудочком.

Кровь, которая накапливалась в предсердиях, начинает наполнять желудочки, чем вызывает падение давления в желудочках и предсердиях. После эти давления медленно поднимаются по мере наполняться кровью предсердия и желудочки, возвращающейся в сердце через вены.

Сокращение предсердий запускается ближе к концу желудочковой диастолы (примерно в момент 0.4 сек) импульсом нерва, возникающим в синусовом узле нерва и действующим на мышцы предсердий.

Этот импульс строит зубец Р на электрокардиограмме. Сокращение мышечных клеток предсердий вызывает повышение давления внутри предсердий и вытеснение крови из предсердий в желудочки. Заметим, что на протяжении всей диастолы давления в левом/правом предсердии практически совпадают с давлениями в соответствующем желудочке, так как открытые в диастолической фазе атриовентрикулярные клапаны оказывают весьма малое сопротивление протеканию крови через клапаны.

Систола желудочков начинается, в момент, когда потенциал функционирования проходит через атриовентрикулярный узел проводящей системы сердца и распространяется по мускулатуре желудочков - данное действие представлено на ЭКГ комплексом QRS.

Сокращение мышц желудочков вызывает повышение давления в желудочках до более высокого, чем в предсердиях, что приводит к резкому закрытию атриовентрикулярных клапанов, создающему тон S1 на фонокардиограмме.

Давление в левом желудочке начинает нарастать по мере усиления его сокращения, и наступает время, когда оно превышает давление в аортеи открывается аортальный клапан. Период времени от закрытия митрального и до открытия аортального клапана называется фазой изометрического сокращения, так как в этот период желудочек представляет собой замкнутую камеру и его объем сохраняется.

Во время открытия аортального клапана начинается ток крови из левого желудочка в аорту - в начале очень быстрого, так называемая фаза быстрого кровотока, когда давление в желудочке еще продолжает подниматься. Линейная скорость тока крови в аорте в этой фазе достигает - 150 см/сек.

Давление в аорте и левом желудочке в итоге достигает максимума (нормальное максимальное систолическое давление у человека составляет - 130 мм рт. ст.). Мощность сокращения мускулатуры желудочка в это время начинает ослабевать, и хотя процесс тока крови продолжается, но уже с меньшей интенсивностью. Давление начинает падать, потому что кровь уходит из аорты в крупные артерии быстрее, чем поступает из желудочка.

В конце сила сокращения миокарда желудочка снижается ниже уровня давления в аорте, что вызывает резкое закрытие аортального клапана, создающее, в свою очередь, дикротическую выемку на графике давления в аорте и создающее второй тон S2 на фонокардиограмме. На электрокардиограмме этому времени приблизительно соответствует зубец Т.

Минимальное давление в аорте, которое наблюдается в конце диастолы, называется диастолическим давлением и в нормальном состоянии для человека составляет 70 - 90 мм рт. ст. Разность между максимальным (систолическим) и минимальным (диастолическим) (120 на 80) называется пульсовым давлением - в нормальном состоянии оно должно находиться в пределах 30 - 50 мм.рт.ст.

Динамика изменения объема и давления в левом желудочке нарисована в виде рисунка 1.4, на котором видны все фазы сердечного цикла.

Отрезок АВ здесь показывает фазу быстрого наполнения, длительность, которого составляет в среднем 0.12 сек.

ВС - фаза медленного наполнения кровью, длительность (вместе с систолой предсердий) составляет 0.38 сек.- фаза изоволюмичекого (изометрического) сокращения, длительность - 0.07 сек.- фаза быстрого изгнания, длительность 0.09 сек.- фаза медленного изгнания, длительность 0.13 сек.- фаза изоволюмического расслабления, длительность 0.07 сек.

На рис. 1.5 систолаизображается линией CDEF (общая протяженность систолы - 0.29 сек), тогда как диастола совпадает с линией FAВС (общая протяженность диастолы - 0.57 сек).

Площадь замкнутой кривой на диаграмме, представляет собой механическую работу, которую сердце совершает за время одного цикла. Эта работа ориентировочно равна 0.8 Дж, что равняется механической мощности сердца в спокойном состоянии около 1 Вт.

Рисунок 1.4. Диаграмма давление-объем для левого желудочка

Работа правого отдела сердца, происходит синхронно с работой левого, и отличие состоит в том, что уровни давлений в малом круге кровообращения (из-за малого сопротивления легких) гораздо ниже и составляет всего 8 мм рт. Когда как, максимальное систолическое - 24 мм рт. ст.

.4 Электрическая активность сердца

Насосная деятельность сердца может производиться лишь тогда, когда волокна сердечной мышцы (миокарда) сокращаются более или менее одновременно (синхронно). Хаотические сокращения приводят к тяжелому состоянию - фибрилляции.

Требуемый порядок сокращения частей миокарда обеспечивается автономной специальной проводящей системой сердца, которая периодически возбуждает сначала волокна предсердий, а затем - после особой задержки - возбуждение быстро охватывает все части желудочков.

Начальный ритм с частотой до 100 имп./мин спорадически производится (см. рис. 1.5) в синусовом (синоатриальном) нервном узле - САУ, который расположен в стенке правого предсердия. Волны возбуждения предсердий доходят до атриовентрикулярного узла - АВУ, где происходит задержка на время 0.06 - 0.12 сек, пока не закончится сокращение волокон предсердий.

Рисунок 1.5. Проводящая система сердца

Далее возбуждение быстро распространяется по ножкам пучка Гиса, состоящего из тонких волокон Пуркинье, и происходит синхронное сокращение всех мышц левого и правого желудочков. Затем вся последовательность возбуждения повторяется в следующем сердечном цикле.

Возбуждение сердечной мышцы совершается электрической активностью клеток миокарда, которые в некотором агрегированном виде регистрируются на ЭКГ.

Поясним, что между двумя сторонами мембраны любой клетки всегда имеется электрический потенциал, который создает разницу концентраций ионов калия, натрия и кальция внутри и вне клетки и имеющий величину от - 90 мВ в состоянии покоя до +20 мВ (с положительным потенциалом на внешней поверхности клетки) в состоянии деполяризации. Это возбужденное состояние продолжается около 0.2 сек, сопровождается активным сокращением и в этот период (называемый абсолютно рефрактерным) клетка неспособна к следующему возбуждению. Затем происходит реполяризация - возвращение к начальному отрицательному потенциалу и клетка готова к следующему циклу.

Рисунок 1.6. Деполяризация, реполяризация клеток миокарда и изменения трансмембранного потенциала

Одновременно в сердце происходит возбуждение многих миллионов клеток и на кардиограммах регистрируется некоторый результирующий потенциал, зависящий от последовательности и времени возбуждения различных участков миокарда, от места присоединения электродов к поверхности тела и электропроводности различных его частей.

В 1903 г. нидерландский физиолог Эйнтховен разработал первую конструкцию электрокардиографа для клинической практики, за что в 1924 г. был удостоен Нобелевской премии. Он предложил тристандартных отведения (рис. 1.8): I - между левой и правой рукой, II - между левой рукой и правой ногой, III - между левой рукой и левой ногой (правая нога при этом заземляется, т.е. ей придается нулевой потенциал). Они отличаются друг от друга амплитудами и формой регистрируемых кривых, но содержат все основные элементы, которые отражают (как бы с разных сторон) электрическую активность клеток сердечной мышцы. Кроме этих классических отведений в современных электрокардиографах применяются также усиленные отведения Гольденбергера и грудные отведения Вильсона.

Рисунок 1.7. Охват возбуждением отделов сердца

Главными элементами ЭКГ являются зубец P, комплекс QRS и зубец T, вызываемые соответственно деполяризацией предсердий, деполяризацией желудочков и реполяризацией желудочков (рис. 1.9).

Рисунок 1.8. Стандартные отведения Эйнтховена

Рисунок 1.9. Идеализированная кардиограмма здоровых людей

Расположение на временной оси, конфигурация и амплидуда отдельных зубцов указывают на правильность (или нарушения) цикла сердечного сокращения и служат важными показателями для диагностики кардиологических заболеваний.

В норме расстояние между последовательными комплексами QRS составляет 0.8 - 1.0 сек, а их длительность - не более 0.12 сек, что говорит о быстрой деполяризации желудочков посредством нормальной функции проводящей системы. Каждому комплексу QRS должен предшествовать зубец P правильной конфигурации, который показывает, что возбуждение исходит из суноатриальногоузла, длительность интервала P Q не должна превосходить 0.2 сек. Зубец T, указывающий на реполяризацию клеток стенок левого желудочка, имеет такую же положительную полярность, как и у зубцов R и P . Данный факт не вполне понятен, поскольку реполяризация - это процесс, обратный деполяризации. Есть предположение, что волна реполяризации движется в обратном направлении и первыми реполяризуются те клетки, которые позднее деполяризовались. Однако, по мнению профессора В.Н. Фатенкова, зубец T отражает деполяризацию других слоев миокарда, сокращение которых уменьшает продольный размер полости, соответственно увеличивая диаметр полости, способствующий более полному наполнению желудочка в фазе диастолы. Во всяком случае, всякие нарушения зубца T свидетельствуют о серьезном нарушении работы сердца.

.5 Основы строения сосудистой сети

Кровь после выхода из аорты последовательно протекает через множество различного типа сосудов: артерии, артериолы, капилляры, венулы и вены. Типичные значения физических характеристик сосудов разных видов приведены в таблице (рис. 1.10).

Артерии имеют достаточно эластичные стенки и расширяются, запасая в себе некоторое количество крови, изгоняемой во время систолы, и затем за счет пассивного упругого сокращения снабжая этой кровью удаленные органы во время диастолы.

Рисунок 1.10. Структура периферической сосудистой системы

Самой крупной артерией является аорта, внутренний диаметр составляет около 25 мм. По мере отделения каждой новой ветви внутренний диаметр артерий уменьшается (диаметр самых мелких артерий 0.1 мм). Последовательное разделение артерий приводит к экспоненциальному росту их числа.

Артериолы имеют меньший диаметр, чем артерии, и другое строение стенок. Стенки артериол содержат много гладкомышечных клеток, и поэтому артериолы могут активно изменять свой диаметр, регулируя тем самым кровоток через периферические органы.

Капилляры являются самыми мелкими сосудами, для прохождения через них эритроциты с диаметром 7 мкм должны деформироваться.

Толщина стенки капилляра составляет всего 1 мкм, а средняя длина - около 0.5 мм. Число капилляров настолько велико (10 миллиардов), что общая поверхность стенок капилляров, через которые осуществляется обмен веществ между кровью и межклеточной жидкостью, составляет более 100 кв. метров.

После прохождения капилляров кровь собирается в венулы и вены и возвращается в правое предсердие. Венозные сосуды имеют очень тонкие стенки, содержащие гладкомышечные клетки и поэтому способные как к активному сокращению, так и к эластичному сокращению. Многие венозные сосуды (особенно крупные) имеют клапаны (сфинктеры), препятствующие обратному току крови в венах.

Особое место в ССС занимает подсистема коронарных (венечных) сосудов,которая питает кровью саму сердечную мышцу (миокард). Левая и правая коронарные артерии берут начала в синусах (впадинах), расположенных непосредственно в корне аорты и перекрываемых при открытом аортальном клапане. Коронарные артерии имеют многочисленные ответвления к стенкам предсердий и желудочков. Отток крови из миокарда происходит в венечный синус, передние вены сердца и особые вены, впадающие непосредственно в правое сердце.

Рисунок 1.11. Кровоток в коронарных артериях (синхронно с давлениями в аорте и левом желудочке)

2. Физические основы моделирования сердечно-сосудистой системы (ССС)

.1 Основы механики жидкостей

Равнодействующая всех сил, действующих на произвольно выбранную в некотором плоскую малую площадку, в первом приближении пропорциональна площади S площадки. Предел отношения к S при S®0 называется напряжением. Вектор имеет нормальную (перпендикулярную) и касательную (вдоль площадки) составляющие, именующиеся соответственно давлением p и вязким напряжением..

Рисунок 2.1. Силы и напряжения в движущейся жидкости

В покоящейся жидкости (гидростатика, рис. 2.1) касательные напряжения отсутствуют, а разность давлений в любых двух точках А и В равна работе (отнесенной к единице объема) по перемещению элементарного объема из А в В. В частности, в гравитационном поле, создаваемом земным тяготением

= = (2.1)

где - плотность жидкости (плотность крови можно считать постоянной и равной в системе СИ (м·кг·сек) крови = 1060 кг/м3 ), , - вектор и абсолютное значение ускорения свободного падения ( = 9.81 м/сек2 ), hA, hB высоты точек А и В, отсчитываемые по вертикали вниз от одного и того же горизонтального уровня.

Рисунок 2.2. Гидростатические силы

Касательное напряжение (рис. 2.3) в ньютоновской жидкости пропорционально градиенту касательной составляющей скорости

= (2.2)

где U (z) - касательная компонента вектора скорости, ось z направлена перпендикулярно площадке, а параметры µ,n := µ/r, которые характеризуют вязкие свойства конкретной жидкости, называются соответственно физической вязкостью (или просто вязкостью) и кинематической вязкостью.

Рисунок 2.3. Касательные силы в движущейся жидкости

Единицей вязкости µ в СИ служит 1 кг/м·сек, которая в 10 раз больше употреблявшейся ранее единицы вязкости в системе СГС (см·г·сек), называвшейся пуаз. Экспериментально установлено, что чистая вода ведет себя как ньютоновская жидкость с вязкостью, составляющая при 20°C примерно 1 сантипуаз, т.е. 10-3 единиц СИ. Соответственно, кинематическая вязкость воды nводы = 10-6 м2 /сек = 10-2 см2 /сек = 10-2cтокс (ст.).

Рисунок 2.4. Зависимость вязкости крови от скорости сдвига и гематокрита (процентного содержания эритроцитов)

Кровь можно рассмотреть как суспензию (взвесь эритроцитов в плазме), вязкость которой при больших и средних значениях скорости сдвига в 4 - 7 раз больше вязкости воды. При малой скорости вязкость крови резко возрастает (до 1 пуаза, т.е. примерно в 200 раз), что связано с агрегированием красных кровяных телец в так называемые монетные столбики, которые существенно повышают сопротивление протеканию крови. Поэтому постоянство вязкости крови (ньютоновость) имеет место только в крупных и средних сосудах, но никак не в артериолах и капиллярах.(рис. 2.4).

.2 Уравнение гидродинамики

В крупных кровеносных сосудах, диаметр которых значительно больше размеров эритроцитов, течение кровиможет быть описано классическим векторным уравнением Навье - Стокса, первое из которых есть уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, а второе является законом Ньютона для элементарного объема жидкости

div, (2.3)

= - grad p + µ∆, (2.4)

где - вектор скорости,∇:= (∂/∂x, ∂/∂y, ∂/∂z) символический операторГамильтона, p - давление, и µ - плотность и вязкость жидкости, ∆:= ∂2 /∂x2 + ∂2 /∂y 2 + ∂2 /∂z 2 - оператор Лапласа.

В случае стационарных, т.е. не зависящих от времени, течений из уравнений (3), (4) следуют соотношения между сечениями тонких трубок S, скоростями U вдоль линий тока, давлениями p, высотами h:

U1S1 = U2S2;P1 + + = P2 ++ ,(2.5)

выражающие физические законы сохранения массы и механической энергии в отсутствие трения, т.е. при µ = 0 (закон Бернулли). Эти зависимости иллюстрируют рис 2.5 и 2.6.

Рисунок 2.5. Изменение скорости течения в участках трубки с разным поперечным сечением

Рисунок 2.6. Закон Бернулли для трубки тока

Заметим, что скорость крови на стенках является неизвестной величиной, которое зависит от движения самой стенки. Поэтому сложные уравнения Навье - Стокса редко используются при исследовании течения крови в сосудах, поскольку во многих случаях необходимо учитывать упругость стенок и их смещение.

Важнейшим и практически единственным случаем, когда уравнения (3)-(4) допускают аналитическое и точное решение, является так называемое течение Пуазейляв длинном жестком прямом (неизогнутом) цилиндрическом сосуде постоянного радиуса r, вектор скорости которого не меняется со временем (установившийся режим). Если направить ось x по оси цилиндра, а y, z - перпендикулярно ей, то решение системы Навье - Стокса представляет собой набор функций

= - ;Vx= V(1 - ), Vy= 0, Vz= 0;(2.6)

где V = const - скорoсть на оси цилиндра (= максимум скорости в сосуде). Данное решение удовлетворяет условию прилипания на стенке цилиндра: |y2 +z 2 =r2 = . Интегрирование Vx (y, z) по поперечному сечению сосуда y 2 + z 2 ≤ r2 приводит к формуле Пуазейля для суммарного объема, который протекает через сечение трубки в единицу времени (кровотока)

Q = = - (2.7)

Знак "-" указывает на тот естественный факт, что перенос вещества происходит в сторону уменьшения (а не увеличения) давления.

Введем теперь очень важный в гидродинамике безразмерный параметр - число Рейнольдса, показывающее отношение инерционных сил к вязким, и равное

Re = V · r/v (2.8)

Эксперименты показывают, что при Re<1700 течение Пуазейля, описываемое соотношениями (6), является ламинарным (плавным, устойчивым) и происходит без завихрений, наоборот, при Re>1700 наблюдаются хаотические завихрения и движение жидкости становится турбулентным.

Рисунок 2.8. Ламинарное и турбулентное течение

Из рисунка 2.8 видно, что первоначально ламинарный пуазейлевский (параболический) профиль скорости при достаточно быстром уменьшении радиуса (что в силу неразрывности приводит к квадратичному увеличению скорости и к возрастанию числа Рейнольдса) переходит в неупорядоченный турбулентный режим с компонентами скорости, перпендикулярными оси потока, что резко увеличивает градиент давления.

Выбирая типичные для средних сосудов значения V = 0.1 м/сек., r = 10-3 м и учитывая, что крови = 5 · 10 - 6 м2 /сек., приходим к выводу, что во всех сосудах Re˂ 1000, т.е. течение далеко от турбулентности.

Исключение составляют аорта (r = 10-2 м) и крупнейшие артерии, скорость кровотока по которым достигает 1.5 м/сек, число Рейнольдса в них доходит до 75000, и следовательно, в них может возникать турбулентность (особенно при наличии повреждений стенок).

.3. Закон гидравлики

Любой участок сосуда (рис. 2.9) можно рассматривать как цилиндрическую трубку длины L радиуса r, по которой течет кровь.

Формулы (5), которые описывают течение Пуазейля, позволяют заключить, что величина кровотока Q, т.е. объема крови (в мл), протекающего через сосуд в единицу времени (1 сек.), пропорциональна разности давлений на входе и выходе трубы P, четвертой степени радиуса и обратно пропорциональна длине трубы

Рисунок 2.9. Течение крови по отрезку сосуда

Q= , (2.9)

где Q = кровоток (мл/мин), P = градиент давления, т.е. разность давлений на входе и выходе (в физиологии давление чаще всего измеряется в миллиметрах ртутного столба - 1 мм рт.ст.= 133 Па, 1 Па = 1 Н/м 2 - единица давления в системе СИ (м·кг·сек) ), L длина трубки (см), r внутренний радиус трубки (см), µ вязкость крови, которая в "физиологической"системе единиц (размеры - в см, давление - в мм.рт. ст., время - в минутах) равна 24 физиол.ед., тогда как в "стандартной"системе СИ µ = 5 · 103 кг/м· сек, а в "физической"системе СГС µ = 0.05 пуаза.

Это уравнение применимо только к ламинарным (без завихрений) течениям жидкости по трубке с жесткими неупругими стенками. В частности, в турбулентном режиме разность давлений пропорциональна не кровотоку, а его квадрату и может значительно превышать значения, рассчитанные по формулам ламинарного течения.

Из уравнения (9) видно, что увеличение кровотока может быть достигнуто как повышением градиента давления, так и увеличением внутреннего радиуса трубки. Оба этих механизма регулирования кровотока имеют большое значение в физиологии.

Вводя так называемое гидравлическое сопротивление, в простом случае течения Пуазейля определяющееся формулой

R: = , (2.10)

мы приходим к соотношениям между градиентом давления и кровотоком в сосуде, полностью аналогичным закону Ома для электрического тока

Q= ,или, другими словами, =·(2.11)

где кровоток Q соответствует силе электрического тока I, проходящего по проводнику, а ∆P - падению напряжения U на сопротивлении R.

Формулы для электрического и гидравлического сопротивлений также аналогичны, но электрическое сопротивление обратно пропорционально квадрату, а гидравлическое - четвертой степени радиуса трубки.

Заменяя вязкость в (10) ее значением, запишем соотношения (11) между кровотоком и падением давления в отрезке сосуда в следующем виде:

Q =λ, т.е. =λ-1 Q; (2.12)

λ = ≈ 60 физиол. ед., λ-1 ≈ 0,0166 физиол. ед.

В конкретном примере, когда длина сосуда L =1 см, внутренний радиус r = 1 мм = 0.1 см, по формуле (11) находим, что для поддержания в сосуде кровотока Q =60 мл/мин разность давлений на входе и выходе сосуда должна составлять 1 мм рт. ст.

Основное уравнение гидравлики (11) применимо не только к одиночному сосуду, но и к стационарным течениям в разветвляющейся сети трубок и даже во всей системе кровообращения в целом. При этом оказывается, что эквивалентное гидравлическое сопротивление R\* сосудов большого круга составляет около

R\* ≈ 60 физиол. ед. = 133·106 кг/м2·сек. = 133·105г/см2·сек. (2.13)

Гидравлические сопротивления складываются, подобно соединению резисторов в электрических схемах (рис. 2.10), при последовательном соединении; при параллельном же соединении складываются проводимости, т.е. величина, обратная к общему сопротивлению параллельно соединенных трубок равна сумме обратных величин к сопротивлениям отдельных трубок

Рисунок 2.10. Последовательное и параллельное соединение сосудов (гидравлических проводников)

Rпосл= R1 + R2+ …Rп ; (2.14)

В общем случае, сложная сеть артериальных сосудов может являться графом, ребра которого представляют отдельные сосуды, а вершины - узлы, в которых сосуды расщепляются (или сливаются). Сопротивление каждого ребра рассчитывается по формулам (10) или (12).

Выбирая в качестве искомых неизвестных давления Pk в N ≈ 109 вершинах, через них по уравнению (11) записываем кровотоки во всех сосудах, удовлетворяющие (в стационарном случае) условию баланса: в каждом узле алгебраическая сумма кровотоков равна нулю.

Добавляя сюда те или иные граничные условия (например, задавая величину давления или кровотока в аорте, и приравнивая нулю давление на концах артериол), приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Практическое решение, даже на самом мощном компьютере, получающейся NхNСЛАУ не представляется возможным без дополнительных предположений, например, агрегирования (укрупнения) групп сосудов одного поколения.

На рис. 2.11 лишь левый сердечный насос и главные артерии большого круга кровообращения и последовательно с ними соединенные системы артериол (более узкие прямоугольники). Короткие черточки (как в электрических схемах) указывают на переход к капиллярной и венозной системам, давление в которых очень мало и его можно считать нулевым. Пунктиром помечены части тела, относящиеся к соответствующим участкам АСС.

Через R1, R2, R9, R10, R11 обозначены отрезки восходящей аорты, R3 - R6- коронарные артерии и артериолы, R7, R8 нисходящие ветви аорты R12 - R16 - артерии и артериолы, питающие мозг, R17- R20 - лучевые сосуды рук, R21- R24 сосуды внутренних органов, R25- R28- артериальные сосуды ног.

В табл. 2.1. приведены данные к рис. 2.11, которые будут использоваться в расчетной задаче № 3.

Таблица 2.1. Ориентировочные значения гидравлических сопротивлений (в физиологических единицах)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R1 | 2 | R8 | 20 | R15 | 200 | R22 | 150 |
| R2 | 3 | R9 | 3 | R16 | 600 | R23 | 30 |
| R3 | 400 | R10 | 2 | R17 | 300 | R24 | 250 |
| R4 | 3600 | R11 | 2 | R18 | 1500 | R25 | 100 |
| R5 | 400 | R12 | 100 | R19 | 300 | R26 | 700 |
| R6 | 3600 | R13 | 100 | R20 | 1500 | R27 | 100 |
| R7 | 20 | R14 | 600 | R21 | 20 | R28 | 700 |

Рис. 2.11. Схема укрупненного графа артериальной сосудистой системы человека

Важно учесть также гравитационные силы (отсутствующие лишь в состоянии невесомости), что осуществляется добавлением к давлению Pk в каждой вершине слагаемого phk, где hk высота данной точки над некоторым уровнем (обычно уровнем расположения сердца).

Несмотря на упрощенный характер гидравлического описания, оно дает возможность строить удовлетворительные модели начального приближения.

.4. Механические свойства стенок кровеносных сосудов

Согласно закону Гука, для случая простого растяжения относительная деформация εупругого материала (например, отношение удлинения проволоки к ее первоначальной длине), пропорционально напряжению P, т.е. величине нормальной силы, приходящейся на единицу площади:

Ε : = ; P : = , т.е.,P = Ee (2.15)

где E - модуль Юнга, который характеризует данный материал и измеряемый в Н/м 2 (Па).

Отметим, что в действительности напряжение P пропорционально относительной деформацииe лишь при значенияхe, меньшихпредела упругости (точка А на рис. 2.12), при большихe наблюдается уменьшение P/e вплоть до точки В - предел текучести, когда увеличение деформации происходит при уменьшении напряжения, при дальнейшем увеличении происходит необратимая пластическая деформация, а затем разрушение образца.

Для тканей организма важно то, что при снятии растяжения деформации сосуда (или мышцы) возвращаются не к исходным нулевым значениям, а к величинам, которые зависят от параметров нагружения и свойств ткани, и для восстановления начальной длины требуется приложить сжимающую нагрузку. Это явление называется гистерезисом.

Рис 2.12. Зависимость напряжения в проволоке от относительной деформации

Стенки артерий, в отличие от металлов, неоднородны и анизотропны, т.е. их упругие свойства различны в разных точках и в разных направлениях. На 70% стенки сосудов состоят из воды, а остальную часть стенки занимают переплетенные волокна легкорастяжимого эластина (его модуль Юнга равен 3 · 105 Па) и гораздо более жесткого (E = 107- 108 Па) коллагена, вступающие в работу лишь при достаточно больших деформациях; в стенках более мелких сосудов присутствуют гладкомышечные волокна, по упругим свойствам примерно такие же как эластиновые, E = 105- 106 Па, но способные к активному сокращению, что необходимо для осуществления регуляции кровотока.

Все сосуды прикреплены к окружающим тканям и подвергаются значительному продольному напряжению; при извлечении из организма длина отрезка сосуда уменьшается на 30-40 %.

Рис 2.13. Диаграмма P- для стенки сосуда

В теории упругости установлена формула, которая связывает давления снаружи P0 и в жидкости внутри P цилиндрического сосуда с внутренним радиусом r, толщиной стенки h и окружным напряжением силой s0в стенке сосуда:

P1r - P0(r + h) = s0h,(2.16)

откуда вытекает известный закон Лапласа

P1 =P0 + . (2.17)

В частности, отсюда становится ясным то, что при надувании воздушного шарика требуемое внутреннее давление P1 существенно уменьшается по мере увеличения его радиуса, сопровождаемого утоньшением его стенки.

По известным упругим характеристикам стенок можно определить нужную для моделирования гемодинамики зависимость S(P ) поперечного сечения S от внутреннего давления P в протекающей по сосуду жидкости (рис. 2.14)

Рис 2.14. S - P -диаграмма площадь сечения давление крови в артерии

В качестве аппроксимации этих зависимостей обычно применяют формулы вида

S(P) = (2.18)

S(P) = S0 +sth,

где s - уровень превышения давления, при котором сосуд прекращает линейно расширяться,k - податливость сосуда (величина, обратная жесткости).

2.5 Упругие и сократительные свойства сердечной мышцы

Основной частью сердца является толстостенный левый желудочек, являющийся эллипсоидом вращения, форма которого меняется от почти сферической во время диастолы до сильно вытянутой в конце фазы изоволюмического напряжения (рис 2.15). Мышечные волокна в миокарде расположены в основном циркулярно, и уменьшение их длины (напряжение) приводит к уменьшению окружности миокарда и повышению давления крови в желудочке.

Рис 2.15. Изменение размеров и формы полости левого желудочка в разных фазах сердечного цикла:а, б - начало и конец диастолы; в, г - начало и конец систолы Серым цветом отмечено сечение стенки миокарда, черным - объем крови, который находится в левом желудочке

Непосредственно перед открытием митрального клапана объем и давление в желудочке минимальны. Согласно закону Лапласа напряжение в миокарде T = F R и поэтому в конце диастолы T увеличивается не менее, чем вдвое, просто из-за увеличения радиуса. Затем наступает фаза изоволюмического напряжения, митральный клапан закрывается, и активно сокращающиеся волокна увеличивают свое напряжение примерно в 25 раз, при некотором уменьшении радиуса, т.к. желудочек становится более вытянутым (принимает форму "огурца").

Очень важен для понимания физиологии мышечной активности закон Франка - Старлинга:увеличение напряжения в мышце непосредственно перед ее сокращением (преднагрузка) увеличивает силу последующего активного сокращения, или, другими словами: сердце сокращается сильнее во время систолы, если оно в большей степени наполняется во время диастолы.

Рис. 2.16. Иллюстрация закона Франка-Старлинга: 1 - увеличение ударной работы левого желудочка при увеличении среднего давления в левом предсердии 2 - диаграммы "давление-объем" при различной величине

сердце кровь гемодинамика сосуд

3. Математические модели процессов в системе кровообращения

.1 Упрощенная модель однокамерного сердца

Будем считать, что сердечно-сосудистая система организма замкнута и состоит из мышечного (расслабляющегося и сжимающего) однокамерного сердца и одного сосуда, являющейся второй - неактивной, но упругой камерой (рис.3.1). Данная простейшая ситуация имеет некоторый смысл для простейших, червей и моллюсков, но, конечно, никак не для млекопитающих.

Рис. 3.1. Эквивалентная электрическая схема системы кровообращения с одной активной камерой

В этом случае кровообращение можно описать линейной системой двух уравнений второго порядка с четырьмя неизвестными:

I1  + R1  +=, (3.1)2  + R2 +=,

где V1 (t), V2 (t) зависящие от времени и подлежащие определению объемы первой и второй камер, P1 (t), P2 (t) давления в них, F(t) дополнительное внешнее давление, создаваемое активной стенкой первой камеры, а постоянные I1, I2 коэффициенты инерции камер, C1, C2растяжимости, R1, R2 сопротивления камер, тогда как R1,2 коэффициент сопротивления межкамерного протока.

Следует сразу же отметить, что в силу третьего уравнения системы всегда выполнено dV1 (t)/dt = dV2 (t)/dt, т.е.

V1 (t) + V2 (t)єV0 єconst, (3.2)

что выражает неизменность общего объема крови в двухкамерной системе.

Выбирая в качестве внешнего воздействия, которым в системе служит функция напряжения F(t) первой камеры, гармонически изменяющуюся функцию времени F1(t) := F(w) exp(iwt), w - угловая частота, ищем решения системы (1) также в виде гармонических функций с той же угловой частотой вида

Vj(t) = (w) exp(iwt), Pj(t) = (w) exp(iwt), (3.3)

где j(w), j(w) - комплексные амплитуды, для определения которых непосредственно из (1) получается система линейных алгебраических уравнений

(w)(-w2 +iwR1 + C1-1) = (w) - (w),

(w)(-w2 +iwR2+ C2-1) = (w), (3.4)1,2(w)=(w)-(w); iwR1,2(w)=(w)-(w);

В частности, для статического случая (w = 0) имеем,

(0) = (0) =:R0 ;(0)=V0 - (0);

P0 = (0) + С1 (0)=(0) (3.5)

Решение этой системы дается простыми формулами

PO = (3.6)

(0) = , (0) = ,

для гидростатических значений давления в камерах и их объемов.

Далее, при w ≠ 0 решение системы (4) для комплексных амплитуд также нетрудно вычисляется:

(w) = (3.7)

(w) =

(w) =

(w) = - (w).

Имея комплексную амплитуду величины Z(w) := A(w) + iB(w), мы подсчитываем ее модуль |Z(w)| := , характеризующее максимальное значение, и аргумент arg Z(w) =:j, определяемый равенствами cosj = A/|Z(w)|, sinj = B/|Z(w)| и указывающий сдвиг по фазе относительно опорной гармоники exp(iwt).

3.2 Упрощенная модель артериального кровотока

В отличие от камер сердца, инерционными членами в сосудах (за исключением аорты) обычно пренебрегают и описывают артерии как емкость и соединенные параллельно сопротивление, а артериолы (стенки которых мало упруги) - просто как сопротивления.

В укрупненном виде артериальная схемы системы (АСС) может быть промоделирована простой электрической схемой, где Ra- сопротивление кровотоку аорты и крупных артерий, C - емкость, учитывающая их упругие свойства, R- сопротивление системы капилляров и мелких артерий, артериол (рис 3.2).

Рис. 3.2. Эквивалентная схема артериальной системы

Кровоток в аорте Qa (t), давления Pa (t) = P1 (t) и P (t) = P2 (t) на входе и выходе из аорты, токи QC (t) и QR (t) являются в норме периодическими функциями времени (P0 (t) :є 0), определяемыми периодическими сокращениями левого желудочка (LV), причем среднее за период значение кровотока в емкости должно равняться 0 (иначе происходило бы неограниченное нарастание давления на ней).

Между этими пятью неизвестными функциями имеется четыре соотношения:

Qa = QR + QC; QR= QC=C; RaQa + P = Pa , (3.8)

поэтому, задав одну из этих функций, можем определить четыре других. Это осуществляется непосредственно из уравнений (8) в тех случаях, когда задается P (t) или QR (t).

Если же дана функция Pa (t) периода T, то для определения P (t) имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

СP΄Ra + =Pa(t) (3.9)

и, вводя обозначения

τ\* := , А\*:= Р(0) (3.10)

записываем его решение в виде формулы

Р(t) = (A\* + (3.11)

Неизвестная величина A может быть определена единственным образом из условия периодичности P (T ) = P (0) = A\* :

A\*= (3.12)

Аналогично в более простом случае, когда задан кровоток на входе в аорту Qa (t)єQa (T + t), имеем для P (t) дифференциальное уравнение

СКР΄(t) + P(t) = RQa(t),(3.13)

решение которого, имеющее период T, записывается в виде

P (t)=(А + RQa(y)); τ:=RC,

A , (3.14)

после чего легко находим Pa (t) = RQa (t) + P (t).

Более удобным представляется метод комплексных амплитуд, который описан в разделе 3.1. Считая, что давление в точке k на рис. 3.2 меняется по гармоническому закону Pk(t) = kexp(iwt); амплитуды кровотоков в Ra, R и C выражаются формулами

, , , (3.15)

и поэтому между комплексными амплитудами имеют место то алгебраические соотношения

; Z0,2 , (3.16)

где Z0,2 := (iwC + R-1 ) - 1, Z0,1 = Z0,2 + Ra являются комплексными аналогами сопротивлений, которые называются импедансами и складывающиеся при последовательном соединении элементов, а обратные к ним величины , - адмиттансы, складывающиеся при параллельном соединении.

Произвольное входное воздействие Qa(t) (или P1 (t)) периода T, может быть разложено в ряд Фурье

: = ,

(3.17)

Учитывая соотношения (16), в которые входят параметры схемы, вычисляются периодические (с тем же самым периодом T ) зависимости P1(t), P2 (t), QC (t) также в виде рядов Фурье

(3.18)

Применяя эти же соотношения, мы можем проводить расчет цепочечного соединения.

Рис. 3.3. Схема, включающая несколько каскадов упругого демпфирования

Например, адмиттансы и импедансы в приведенной трехкаскадной схеме вычисляются один за другим по формулам

6,0-1 = iwC2 + R3-1, Z5,0 = Z6,0 + Rm,2, Z4,0 -1= Z5,0 -1+ iwC1 + R2-1, (3.19)

Z3,0 = Z4,0 + Rm,1, Z2,0 -1= Z3,0-1 + iwCa + R1-1, Z1,0 = Z2,0 + Ra.(3.20)

Здесь Zk,0 означает импеданс схемы, получаемой отбрасыванием всех элементов верхнего ряда, расположенных левее точки k.

.3 Модель работы четырехкамерного сердца

Одна из гидравлических схем работы сердца с учетом возможных патологий клапанов, дефектов межкамерных перегородок и др. может быть изображены на рис. 3.4.

Рис 3.4. Структура кровотоков и давлений в камерах сердца

Состояние каждой из четырех камер описывается двумя параметрами (j = 1, 2, 3, 4): Pj = Pj (t) - давление, Vj = Vj (t) - объем, и тремя константами: Cj- растяжимость стенок, Rj - коэффициент сопротивления, Ij - коэффициент инерции. Параметры примыкающих к камерам сердца клапанов (аортального и легочного) и соответствующих участков сосудов j = (5, 6, 7, 8): pj (t) - давление, Qj(t) - кровоток (объемная скорость), а константы Rj - коэффициент сопротивления. Параметры межкамерных элементов (митрального и атриовентрикулярного клапанов, а также межкамерных дефектов) (i, j = 1, 2, 3, 4): Qi,j - кровоток, а константы Ri,j- коэффициент сопротивления.

Двадцать параметров модели Pj (t), Vj (t) (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), Q1,2 (t), Q2,3 (t), Q3,4 (t), Q1,4 (t) можно связать 16 уравнениями:

) осредненными по объему уравнениями движения в каждой из камер

Ij + + = , j= 1,2,3,4, (3.21)

где Pj,e (t) заданные функции времени (внешние давления, вызываемые напряжением стенок миокарда), которые описывают сжатие и расслабление желудочков и предсердий.

) законами сохранения массы

; ; (3.22)

; (3.23)

формулой Пуазейля, принятой в физиологии, для каждого из имеющихся в сердце путей тока крови

(если легочный клапан открыт,) иначе ;

(если аортальный клапан открыт,) иначе ;

(3.24)

(если атриовентрикулярный клапан открыт), иначе Q1,4= 0 2,3 = (если митральный клапан открыт), иначе Q2,3 = 0;1,2 =(если есть дефект межжелудочковой перегородки),иначе Q1,2 = 03,42 = (если есть дефект межпредсердной перегородки),иначе Q3,4 = 0

Для замыкания этой системы дифференциальных уравнений к ней следует присоединить еще 4 соотношения. Ими могут быть:

• либо задаваемые давления на 4 сосудах, которые соединяют камеры сердца с другими частями ССС

(j= 5,6,7,8), (3.25)

• либо (усредненные по сердечному циклу) соотношения между выходами желудочков

(3.26)

.

Начальные условия для этой системы ОДУ задавать не требуется, вместо них используются условия периодичности (одинаковости параметров всех камер в начале и в конце сердечного цикла).

Фактически могут быть измерены только кровотоки и давления, тогда как константы модели (их более 20) требуется подобрать для максимального соответствия наблюдаемым данным.

Как видно из приведенного описания, данная модель предполагает, что давления, создаваемые стенками желудочков, являются известными (заданными) функциями времени, т.е. в модели не учитывается ни коронарное кровообращение, ни иннервация различных частей миокарда, приводящая к синхронизированному напряжению, создающему, в свою очередь, волны повышенного давления (систола) и активного его понижения (диастола).

.4 Квазиодномерная модель гемодинамики

Рассмотрим прямолинейный сосуд с жесткой стенкой, сечение которого, оставаясь по форме круглым, мало меняется вдоль оси x, так что локально течение в сосуде считаем пуазейлевским.

Записывая закон Бернулли с добавлением в него силы тяжести и силы трения (пропорциональной вязкости и скорости и обратно пропорциональной площади поперечного сечения), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению квазиодномерного стационарного приближения

= , (3.27)

где постоянными являются кровоток в сосуде Q, ускорение свободного падения, угол между положительным направлением (в сторону, куда течет кровь) оси трубки и направлением вертикали, плотность и кинематическая вязкость кровиρ,v, а меняется только сечение сосуда S(x) =π r2 (x).

Из (27) выводится явная аналитическая формула для величины давления в разных сечениях сосуда

. (3.28)

В частности, при S(x) = constснова приходим к пуазейлевской зависимости линейного уменьшения давления вдоль направления кровотока.

Формула (28) дает начальное приближение (S(x) = S0 (x), P (x) = P0 (x)), которое будет использоваться при расчете пульсовых волн, возникающих в стенке, обладающей упругостью.

Для учета упругих свойств стенки, можно задать "уравнение состояния"S = S(P ), которое нужно добавить к системе нестационарных уравнений Навье - Стокса

; cos , (3.29)

где давление и скорость будут на этот раз функциями не только продольной координаты x, но и времени t. В простейшем приближении тонкой изотропной оболочки, отклонения сечения S(x, t) от значений стационарного режима S0 (x) пропорциональны отклонению давления P (x, t) от P0 (x):

P(x,t)= P0(x) + p(x,t); S(x,t)=S0(x) + s(x,t);

s(x,t) = Ɵρ(x,t); Ɵ=Ɵ(x):=S΄PǁǁP=P˳(x). (3.30)

Подставляя эти соотношения в (27) и оставляя только члены, линейные относительно p(x,t) и s(x,t), приходим к линеаризованным уравнениям гемодинамики с трением ЛГДТ

Система уравнений, которое относится к гиперболическому типу, замыкается начальными условиями u(x, 0) = (x), p(x, 0) = (x).

Приближенное аналитическое решение удается получить лишь тогда, когда постоянства кровотока и сосуда постоянного сечения и постоянной жесткости: Q const, S0 (x) = S0 const, (x) = 0 const.

Функции f± (x (U ± c)t представляют собой две бегущие волны произвольной формы, которые распространяются в сосуде со скоростями U ± c.

В случае переменных коэффициентов, например, для практически важного случая конусного сужения крупных артерий и меняющейся их жесткости, а также при сложных нелинейных зависимостях S = S(P, x) следует применять разностные методы непосредственно к решению исходной системы уравнений Навье - Стокса (3), т.е. не используя процедуры линеаризации.

Опишем общую схему численного решения уравнений гемодинамики.

Далее, строится разностная схема, т.е. производные по x и по t заменяются разностными отношениями значений искомых величин в узлах сетки. При этом нужно выполнить два требования: во-первых, соответствующая дискретизированная величина должна стремится к требуемой производной при h, 0 с погрешностью O(h +) (свойство аппроксимации) и, во-вторых, решение получаемой алгебраической задачи с N M переменными должно быть единственным и зависящим непрерывно от начальных данных (свойство устойчивости, т.е. при выборе соответствующих норм должна иметь место оценка с постоянной M,

Согласно классической теореме А.А. Самарского (см. напр. [9, часть III, гл. 1, § 6]), если исходная дифференциальная задача поставлена корректно, разностная схема аппроксимирует исходную задачу и является устойчивой, то решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи и порядок точности решения совпадает с порядком аппроксимации.

Следует отметить, что далеко не всякая разностная схема обладает свойством устойчивости. Наиболее устойчивыми являются так называемые неявные схемы, когда приближаемые производные вычисляются по неизвестным значениям на (k + 1)-м слое по времени, например, абсолютно устойчивая неявная схема для системы (5) имеет вид S(Pj,k+1 ) S(Pj,k ) Uj+1,k+1 S(Pj+1,k+1 ) Uj1,k+1 S(Pj1,k+1 ) Uj,k+1 Uj,k Uj+1,k+1 Uj1,k+1 Pj+1,k+1 Pj1,k+ Здесь известными являются физические параметры: -,, g, L, T, количества узлов J и K по переменным x и t, а также функциональная, нелинейная, зависимость площади сечения от давления, S = S(P ). Кроме того, заданы значения искомых переменных P (x, t), U (x, t) на нулевом временном слое Pj,0, Uj,0. Для нахождения значений Pj,k, Uj,k, k 0, которые представляют собой приближенные значения искомых давлений и скоростей в узлах сетки, разработаны специальные итерационные методы.

сердце кровь гемодинамика сосуд

4. Математические модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками

.1 Материалы и методы

Рассматриваем осесимметричное течение крови, которая принимается вязкой и несжимаемой жидкостью, в цилиндрическом сосуде постоянного радиуса R. Движение происходит в цилиндрической системе координат (x, r, θ), причем ось x совпадает с осью симметрии движения. Материал стенки считаем идеально упругим и изотропным.

Перемещения стенок будем представлять в виде суммы:

общ(x,t) = u(x,t) + u0(x,t), wобщ(x,t) = w(x,t) + w0(x,t),

где u(x,t) - упругие движения в продольном направлении, w(x,t) - в поперечном, а функции u 0(x,t), w0(x,t) описывают дополнительное смещение стенки сосуда, вызываемое реактивным мышечным сокращением при прохождении по сосуду пульсовой волны давления, то есть при работе вторичного сердца.

Система уравнений движения кровотока в гибких цилиндрических сосудах в таком случае будет:

, (4.1)

=

=

где p - давление; μ - вязкость крови; ρ - плотность крови; vx - осевая компонента скорости крови; t - время; u, w - перемещения стенки в продольном и поперечном направлениях; vr - радиальная компонента скорости крови; R - радиус сосуда; Sʹ, Tʹ - силы натяжения в окружном и продольном направлениях соответственно; S0, T0 - начальные значения сил натяжения в окружном и продольном направлениях; коэффициент Пуассона; E - модуль Юнга стенки; ν -h - толщина стенки сосуда; ρ0 - массовая плотность материала стенки сосуда.

Третье уравнение системы получено из уравнений Навье-Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости. Оно заменяет уравнение неразрывности.

На стенке задаются кинематические и статические контактные условия:

. Статические условия:

(4.2)

. Кинематические условия:

│𝑟=𝑅 = + ,

│𝑟=𝑅 = + . (4.3)

Цель и задача заключается в нахождении общего решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2), (3). В силу линейности уравнений задача распадается на однородную и неоднородную. Сначала построится общее решение однородной задачи, после чего найдем частное решение неоднородной.

В этом однородном случае решение будем искать в виде простых гармонических волн вида:

φ = ,

.(4.4)

Здесь χ - волновое число; - частота пульсации кровотока.

Подставляя функции (4) в первые три уравнения системы (1), получим значения для амплитуд скоростей и давления:

.(4.5)

где - функции Бесселя первогорода порядков 1 и 0.

Далее, будем строить частные решения для каждой волновой гармоники , подставим в однородную систему (1) значения (5), а также функции (4) и выполним однородные кинематические условия (2). Получая систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных , A и B. Ненулевое решение системы существует тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Таким образом, получим дисперсионное уравнение следующего вида:

Здесь .

Для решения, полной краевой задачи с учетом граничных условий на входе и выходе из ССС необходимо решить дисперсионное уравнение для конечных значений волновых чисел (конечных гармонических частот колебаний). Для определения числа решений и начального приближения может быть использован контурный график начальных точек дисперсионных кривых, полученный в программном пакете РТС Mathcad.

В случае (0.00001)малых коэффициентов вязкости дисперсионное уравнение имеет два комплексных решения. Контурный график представлен на рисунке 4.1.

Рис. 4.1. Начальные точки дисперсионных кривых в случае малой вязкости крови

Рис. 4.2. Начальные точки дисперсионных кривых в случае большой вязкости крови

Используя полученные точки в качестве начальных приближений для построения нашего решения дисперсионного уравнения, можно построить необходимые для данного случая дисперсионные кривые. Наличие дисперсионных кривых позволяет завершить решение полной краевой задачи с учетом краевых и контактных условий поставленной задачи.

Таким образом, общее решение уравнений однородной системы (4.1) построено.После перейдем к построению частного решения неоднородной системы.

Решение частной неоднородной системы для каждой волновой гармоники будет:

= ,

.(4.6)

где,

параметр Уомерсли, - скорость пульсовой волны давления Моянса-Кортевега.

Функции , , показывающие работу распределенного сердца, определяются из данного эксперимента. Следует отметить, что установившееся течение вязкой жидкости при дополнительном мышечном воздействии возможно, если среднее ускорение реактивного перемещения стенок равно 0. В простейшем случае функции реактивного перемещения стенок могут быть прописаны в таком виде:

где:- параметры, характеризующие степень мышечной активности,0 q1, T - период пульсации жидкости (крови).

В таком случае, график ускорения реактивного перемещения стенок будет антисимметричным, и среднее ускорение будет равно нулю (рис. 4.3).

Рис. 4.3. Реактивное ускорение стенок сосуда ССС

Затем, раскладывая в ряды Фурье функции скорости и ускорения реактивного перемещения стенок сосуда и подставляя в неоднородную систему (1) и в контактные условия (2) функции (6), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных u10, w10, A0, B0, «определитель» которого будет отличен от нуля, так как не является корнем дисперсионного уравнения.

Решая данную систему, определим неизвестные постоянные и построим базовые частные решения для продольной и поперечной частей скорости. Сумма решений, найденных для каждой волновой гармоники , даст решение системы уравнений (4.1) с кинематическими контактными условиями (4.2).

В последствии, задача о построении решения системы уравнений (1) с граничными условиями (4.2), (4.3) будет решена. Расчеты с помощью построенной трехмерной аналитической модели трудоемки, поэтому нами принято решение о необходимости ее упрощения.

Ставя среднее значения радиуса сосуда в уравнение системы (4.1), получим одномерную систему течения вязкой несжимаемой жидкости (крови):

+

=

,

(4.9)

где:Q = объемный расход крови человека.

Не учитывая инерционными силами, действующими на оболочки сосуда, а также конвективной составляющей ускорения частиц крови, из замкнутой системы уравнений (9) получим более простую систему уравнений динамики движения кровотока:

\*

Из системы уравнений (10) с учетом разложения функций (4.7), (4.8) в ряды Фурье, получаем разрешающее уравнение для объемного потока крови:

(4.11)

коэф. разложения в ряд Фурье.

Построение аналитического решения задачи по определению объемного потока крови в системе кровеносных сосудов проводилось для участка сосудистой системы ССС с двумя узлами бифуркации. Рассматривается система артерий, состоящая из 5 сегментов, в которых происходит«периодическая пульсация» крови. Каждый отдельный участок обладает своей пространственной одномерной системой координат, начало которой находится на входе, а ось x направлена в сторону выходного отверстия сосуда.

На каждом i-м участке запишем уравнение для объемного потока крови:

(4.12)

Граничные условия для данного случая:

При х=0, .

Контактные условия выражают условия сохранения расходов и непрерывности давления в узлах разветвления сосуда:

. (4.15)

Объемный поток крови на каждом участке будем искать в виде:

(4.16)

где: - средний объемный кровоток на I-том участке.

Решением уравнения (12) в данном случае будет функция:

(4.17)

Неизвестные константы определяются из граничных условий (13) и контактных условий (4.14), (4.15).

Средний объемный поток крови на первом участке определяем из условия на входе:

Где - дополнительный средний расход, за счет продольных сокращений стенки;

На остальных участках средние объемные потоки крови определяются из первого уравнения системы (10) при условии установившегося течения жидкости:

Таким образом, построена одномерная математическая модель периодического движения крови, которая учитывает работу сердца. Важнейшим преимуществом данной математической модели является то, что основная система уравнений допускает аналитическое решение.

Заключение

Предложенные варианты постановки задач гемодинамики в системе кровеносных сосудов позволяют уменьшить количество основополагающих предположений и упростить основную систему уравнений. В случае, когда проводится учет направленных потоков жидкости, отпадает необходимость пренебрежения конвективной составляющей ускорения частиц, что повышает точность результатов.

Новый вид кинематических контактных условий стесненного скольжения, по мнению авторов, более адекватно описывает процесс взаимодействия потока со стенкой. В реальном сосуде в случае выполнения условий прилипания частиц неизбежным был бы процесс образования атеросклеротических отложений, который является патологическим. Таким образом, математические модели, в которых взаимодействие крови со стенкой описывается подобным образом, не могут достоверно описывать процесс гемодинамики.

Замена уравнений Навье-Стокса уравнениями Эйлера в системе существенно упрощает основную систему, при этом уравнение для тонкого погранслоя вблизи стенки сосуда, позволяет учесть все возникающие в этой области процессы.

Таким образом, делается попытка упрощения и уточнения, позволяющий моделировать движение крови в системе кровеносных сосудов человека.

Рассмотрены варианты задачи о движении крови в сосудах с упругими стенками, позволяющие уменьшить количество гипотез и, тем самым, повысить строгость и реалистичность предлагаемых математических моделей с точки зрения физических представлений.

Кроме того, предлагается попытка нового вида кинематических контактных условий, позволяющих более точно описать процесс взаимодействия потока крови с сосудистой стенкой.

В первой главе дается общая информация по анатомии и физиологии системы кровообращения, электрокардиографии ССС.

Во второй главе излагаются физические законы, которые служат основой построения математических моделей в кардиологии: приведены уравнения гидродинамики, гидравлики, теории упругости, описаны сократительные свойства сердечной мышцы. На этом базисе в главе строятся модели сердца и артериальной сосудистой системы, начиная от простейших однокамерных до достаточно полных четырехкамерных.

В третьей главе описывается квазиодномерная модель гемодинамики артериальных сосудов, позволяющая рассчитывать распространение пульсовых волн с учетом упругих свойств стенок и реально существующей переменности сечения по длине сосуда. Приведены разностные схемы для нахождения численных решений в случаях, когда чисто аналитические методы перестают работать.

Четвертая глава посвящена математической модели движения крови в системе сосудов с упругими стенками. В данной главе использованы материалы из автореферата диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Доль А.В. «Биомеханическое моделирование кровеносных сосудов с учетом мышечной активности стенок» разработанной в 2013 году.

В данной выпускной квалификационной работе разработана одномерная линейная математическая модель, для которой получено аналитическое решение. Результаты, полученные с помощью данной модели, мало отличаются от результатов, полученных методом конечных элементов. Важнейшим преимуществом данной модели является то, что основная система уравнений допускает аналитическое решение.

Литература

1. Колябин Г.А. Применение математического анализа к описанию процессов репарации инфаркта миокарда и прогнозированию кардиологических заболеваний: Учебное пособие. - М.: РУДН, 2008. - 144 с.

2. Доль А.В. Биомеханическое моделирование кровеносных сосудов с учетом мышечной активности стенок: автореф.дис. … канд. физ.-мат. наук. - Саратов: Саратовский гос. ун-т, 2013. - 23 с.

. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ.- М.г Мир, 1984.-528 с., ил.

. Кудрина В.Г. Медицинская информатика: Учебное пособие. - М.: РМАПО, 1999. - 100 с.

5. Агапов А.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высшая школа,1994. - 112 с.

6. Афифи А. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ: Пер. с англ. / А. Афифи, С. Эйзен. - М.: Наука, 1982. - 488 с.

. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Высшая школа, 1998. - 480 с.

. Боровиков В.П. Популярное введение в систему STATISTICA. -М: КомпьютерПресс, 1998. - 267 с.

. Вейр Б. Анализ генетических данных.- М.: Мир, 1995. - 400 с.

. Медик В.А., Толмачев М.С., Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии: Руководство. В 2-х томах / Под ред. Ю.М. Комарова. Т.1.Теоретическая статистика. -М.: Медицина, 2000. - 412 с.

. Медик В.А., Толмачев М.С., Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии: Руководство. В 2-х томах / Под ред. Ю.М. Комарова. Т.2.

. Прикладная статистика здоровья. - СПб: СМИО Пресс, 2003. - 352 с.

. Компьютерные исследования и прогресс медицины (Сборник статейпод редакцией О.М. Белоцерковского) - М.: Наука, 2001. - 302 с.

. Вараксин А.Н. О Статистические модели регрессионного типа вэкологии и медицине / Под редакцией В.Н. Чуканова. -Екатеринбург: Изд-во «Гощицкий», 2006. - 256 с.

. Мовшович Б.Л., Калябин Г.А. Клинические особенности репарацииинфаркта миокарда. // Терапевтический архив. - 1989 - № 4. - С. 235-242.

. Гланц С. Медико-биологическая статистика.- М.: Практика, 1998. - 459 с.

. Алексеевский А.В., Гельфанд И.М., Извекова М.Л., Шифрин М.А. Ороли формальных методов в клинической медицине: от цели к постановке задачи// - М.: Наука, 1997. с. 5-36.

. Белоцерковский О.М., Виноградов А.В., Глазунов А.С. Метод раннего прогнозирования течения острого инфаркта миокарда и постинфарктного кардиосклероза// Информатика и медицина. - М.: Наука, 1997. с. 72-119.

. Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А. Очерки о совместной работе математиков и врачей. - М.: УРСС, 2004. - 320 с.

. Журавлев Ю.И., Избранные научные труды. - М.: Издательство Магистр, 1998. - 420 с.

. Журавлев Ю.И., Гуревич И.Б. Распознавание образов и анализ изображений / Искусственный интеллект / Справочник. - М.: Радио и связь, 1990. - 325с.

.Анализ данных на компьютере: Учебное пособие / Ю.Н. Тюрин, А.Н. Макаров; Науч. ред. В.Э. Фигурнов. - 4-e изд., перераб. - М.: ИД ФОРУМ, 2010. - 368 с.

. Котов Ю.Б. Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 328 с.

. Дюк В., Эманюэль В. Информационные технологии в медико-биологических исследованиях. - СПб.: Питер, 2003. - 528 с.

. Моделирование виллизиевого круга человека в норме и при патологии / Д.В. Иванов, А.В. Доль, О.Е. Павлова, А.В. Аристамбекова // Российский журнал биомеханики. - 2013. - Т. - 17. № 3(61). - С. 36-49.

. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Педли. - М.: Мир, 1983. - 400 с.

. Смертность от болезней системы кровообращения в России и экономически развитых странах / В.И. Харченко, Е.П. Какорина, М.В. Корякин и др. // Российский кардиологический журнал. -2005. - № 2. - С. 5-18.

. Гуляев Ю.П., Коссович Л.Ю. Математические модели биомеханики в медицине. - Саратов.: Изд. СГУ, 2001. - 49с.

. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. - М.: Мир, 1983. - 400 с.

. Вольмир А.С., Герштейн М.С. Проблемы динамики оболочек кровеносных сосудов // Механика полимеров. - 1970. - № 2. - C. 373-379.